數學傳播 50卷1期, pp. 11-25

數學與詩[1]

何崇武

I. 我一生從事數學的研究和教學。在三十多年前突然寫起詩來。並且在文學雜誌上, 發表了十多篇。我的一些理工方面的朋友, 似乎一時都把我視爲異端。其實一個學數學的人寫詩, 並不是一件奇怪的事, 如華羅庚、蘇步青、陳省身都能寫中國古體詩。最近讀到清華大學前校長, 物理學家顧秉林的一篇演講 [1, p.70-98] 談到華羅庚和一些中國科學家, 在 20 世紀 50 年代訪問莫斯科。那時火車很慢, 需要三天兩夜方能到達。於是大家就對對子以打發時間。因爲核物理學家錢三強在座, 有人做了個上聯:「三強韓趙魏」。這上聯一出, 大家想了一下都開始搖頭, 這上聯太難對了: 上聯的頭兩字是數, 下聯的頭兩字也必須是數。並且不能與上聯重複。但下聯的數如果不是三, 每聯五個字, 除去頭兩個字外, 下聯只剩下三個空位。如何能找到三樣東西, 來符合不是三的數? 就在大家認爲, 這是個不可能對的絕對時, 華羅庚找到了一個下聯: 「九章勾股弦」。【九章算經】是中國古代數學經典。「勾股弦」又是九章算經裡的一個重要結果, 就是大家熟知的「畢氏定理」。這下聯不但和上聯對得工整, 並且上聯的「三強」影射在座的錢三強, 下聯的「九章」也正好影射在座的物理學家趙九章。所以這幅對聯, 真是珠聯壁合, 天衣無縫。對對子是學寫律詩的基本功。相信華羅庚若不是深具中國古詩功力, 恐怕很難對得上這幅對子。

喜愛詩的數學家, 並不僅限於受傳統教育老一輩的人, 和我年齡相仿的數學家亦大有人在。由於篇幅所限, 我現在僅提兩位。一位是王九逵, 他比我年長四歲。他在台大和中央大學數學系, 都執教多年。台灣許多出名的數學教授, 都出自他的門下。他在 1999 年自中央大學數學系退休後, 就致力於把中國文學著作, 翻譯成世界語 (Esperanto)。他對中西文學都有很深的修養。他已翻譯了一些中文經典和名著, 例如「列子寓言」、金聖嘆之「不亦快哉」、以及柳宗元之文章 [2, Item 11], 他也翻譯了不少詩 [3]。並且翻譯了我寫的一篇與詩酒有關的散文 [4]。另一位是唐文標, 他和我年齡僅差兩歲。他曾在台大和政大的數學系任教。唐文標不但是位數學家。更是位詩人 [5, p.72], [6]。他除了寫詩, 還發表了一系列評論新詩的文章。因而引起台灣詩壇一場很熱烈的辯論。當時在台灣的名詩人大多參與其中 (見參考資料 [6]-[11])。這場辯論亦使台灣詩壇的寫作詩風, 起了相當的變化 [11]。

學數學的人喜愛詩, 亦並非僅限於國內。十九世紀的德國大數學家 Karl Weierstrass 在

[1] 本文作者願向薛昭雄教授致謝, 沒有他的鼓勵不可能寫成此文。另外向 Professor Seth Zimmerman 致謝, 是他告訴我有關但丁的神曲的事。

1883 年曾說過: 一位不具備一點詩人秉賦的數學家, 不可能成爲圓滿的數學家 (*ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein*) [12]。1900 年在巴黎召開的第二屆國際數學會議上, 瑞典數學家 Gösta Mittag-Leffler 報導了此事。這句話也被收入在當年會議紀錄裡 [13, p.149]。國外數學家對詩的興趣, 至今並未稍減。美國數學學會 (American Mathematical Society), 現在每年舉辦一次詩的比賽 [14], 並且在數學學會支持之下, 由兩位會員, Dr. S. Glaz 和 Dr. J. Growney 搜羅了西方從古到今, 一百五十多首與數學有關的詩, 出了本詩集 [15]。此外有本與數學有關的期刊, 曾出了數學與詩的專輯 [16, Vol. 8, No. 1-2]。爲什麼這麼多學數學的人喜歡詩, 甚至於自己也寫詩, 他們寫的又是什麼樣的詩, 這些問題在國內好像還不太有人討論。我一生從事數學研究和教學。寫詩也有多年。我想談談這些問題。下面第二節, 我們先看看什麼是與數學有關的詩, 學數學的人, 又寫什麼樣的詩。關於數學和詩, 國外已有不少專門書籍。如 [17]-[21]。其中參考資料 [17] 對於數學和詩的異同討論得比較詳細。第三節就從 [17] 開始, 看看以往的作者的看法。第四節再回到我本人的經驗, 從我個人的觀點, 試比較詩與數學, 並嘗試找出, 爲何許多學數學的人喜歡詩。因爲這篇文章談到一些數學系統, 最後加上兩個附錄, 對這些系統略爲解釋。

本文寫好後請了幾位學數學的朋友看過, 其中有位朋友來信告訴我, 有位物理學家發現但丁神曲中所描寫的宇宙, 居然和廣義相對論中的封閉宇宙模型處處吻合。這位物理學家大爲驚訝。一位中世紀的詩人如何能僅憑直觀, 就能了悟到現代人對宇宙的描述。他的結論是詩人和科學家在思想層面最深處應是相通的, 因此才能有這樣相似的直觀。我這位朋友認爲我既然寫詩人和數學家相似之處, 又在文中談到但丁, 應該加上這一段。因此文已然寫就, 爲避免編排麻煩, 就把有關但丁的宇宙描述附在第四節末尾。

II. 我想先從上節提到的那本有關數學的詩集 [15] 開始, 看看什麼是與數學有關的詩, 這本詩集收羅的詩, 可以分成兩大部分: 學數學的人寫的詩, 和一般詩人所寫與數學有關的詩。一般詩人早先也必學過數學。偶而寫上幾首有關數學的詩, 不足爲奇。我想就專門討論學數學的人所寫的詩, 學數學的人因爲工作上的訓練, 可能觀點上與一般詩人不同, 寫的詩也許較爲獨特。一般來說這些詩可以分爲三種類別。以下就把每種選一兩首詩, 加以介紹, 這樣我們可以知道, 學數學的人。都寫些什麼樣的詩。

第一種是直接把數學入詩。一首詩裡突然出現數學符號, 似乎有些突兀。但對學數學的人而言, 是一件很自然的事。因爲詩講究用最精練的語言, 來表達可資玩味的思想。而數學符號, 正是學數學的人所知的最精練的語言。

我們先看一位藝術家 Kas Maslanka 所寫的一首詩 [15, p.168]。這位藝術家也可算做一位數學工作者, 因爲他受過很好的數學訓練, 他也把大量數學應用在他的藝術品內, 包括不少數學詩 [22]。他並與英國名數學家 John Horton Conway 合作, 把 Conway 發展出的超現實

數 (Surreal Numbers; 見文後之附錄一), 應用在他的藝術作品之中 [23]。Maslanka 的這首詩很簡短。全詩只有一個等式 "Love $= \lim_{\text{Ego}\to 0} \frac{1}{\text{Ego}}$"。這詩雖短, 意義確堪玩味。詩人宣稱愛 (Love) 與自我意識 (Ego) 成反比; 當自我意識趨近於零時, 愛可以擴充到無窮大。這首詩所用的語言極爲精練。因爲這首詩不但是詩集 [15] 裡最短的一首詩, 我想即使找遍古今中外, 也很難想像能找出比這首還短的詩。順便說一句, 根據極限的定義, 在這極限中, 我們只考慮自我意識趨近於零, 而不等於零。自我意識是否能等於零, 是在這極限考慮的範圍之外。故此這詩對於一個人的自我意識是否真能等於零, 並不採取立場。

以數學直接入詩的例子很多, 在詩集 [15] 中俯拾即是, 如 p. 6, 22, 47, 48, 56, 58, ... 皆是。

第二類型的詩, 是一些數學工作者, 面對一些奇妙而複雜的數學, 在讚嘆之餘, 譜爲詩篇。這類詩在上述詩集 [15] 中也有不少。例如我們知道, 無論多小的一個數, 皆可寫作一個無窮級數之和。十七世紀瑞士名數學家 Jakob Bernoulli , 就以這看法的做了一首詩 [15, p.130]: 我們可以從任何一個小小的數看到無窮。此外如分形 (Fractal) 裡的曼德博集合 (Mandelbrot Set) 或是拓樸中的亞歷山大角狀球面體 (Alexander's Horned Sphere), 都是數學家發現奇妙的, 而日常生活中無法看到的構造。這些都有人把它們寫入詩篇 (見 [15, p.141, 及 p.178])。

關於這一類型, 我想介紹一首頗爲獨特的詩。這首詩爲 1927 年獲得諾貝爾化學獎的 Fredrick Soddy 所作。Soddy 雖是位化學家, 但這首詩是爲了他發現的一條數學定理, 因此可說是一位數學工作者寫的詩。在討論這定理之前, 我們需要先說明一下有關的數學定義。如果 r 是一個圓或是一個球體的半徑, 我們知道 $k = \frac{1}{r}$ 就是這圓或球體的曲率。不過在 Soddy 發現他的定理時, 曲率的名詞尚未統一。他用的名詞是彎曲 (Bent)。他在 1936 年發現如果我們在平面上畫一個小圓, 外面圍繞著三個大圓, 假如這四個圓中每一個圓, 都和其他三個圓相切, 那這四個圓的曲率 k_1, k_2, k_3, k_4 也必須滿足下列的等式:

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2).$$

Soddy 然後把這項結果, 推廣到三維空間的球體。他發現可以找到五個球體, 其中每一球, 都與其他四個球相切。另一方面, 如果有任何五個球相切, 這些球的曲率, 也必須滿足一個類似上面的等式。他覺得他應該發表這項結果。可是他又覺得一篇論文, 不足以描述這些美麗的圖形, 和這些精妙的數學公式。他於是寫了一首格律整齊, 音調優美的詩。他不說這些圓與球相切, 而說他們相吻。他把這詩的標題寫做 《*精確之吻*》(*The Kiss Precise*)。然後把這詩寄往【自然】雜誌。這是個審稿很嚴格的雜誌, 一般科學論文很難被接受。但是這篇論文詩居然被接受 [24]。因而引起不少注意。此後不少人, 把一些相切的圓或球, 叫 Soddy 圓或球。但是後來發現, Soddy 在平面上有關四個圓的結果, René Descartes 在 1643 年就已發現, 因此這定理現在又稱爲 Descartes' Theorem [25]。Soddy 在【自然】發表他的結果之後, 不少人, 包括 Soddy 自己, 又把這結果推廣到 n-維空間。這些推廣之中, 有一篇是位名叫 Thorold Gosset 的數學教授所

作。他把這 n-維的推廣, 用 Soddy 原詩的格律, 也寫成一段詩, 附在 Soddy 原詩的後面, 也發表在【自然】雜誌上面 (見 [26] 及 [15, pp.188-189])。

上面談了兩種學數學的人所寫詩的類型。下面還有一種也有不少人寫。這是一些數學工作者, 在做數學時, 由數學所觸動, 而獲得的一些生活上的感悟。例如在做極限分析時, 我們常遇到的句子: 相對應每一 $\varepsilon > 0$, 必定會有一 $\delta > 0$。這種句子看多了之後, 有時也會想如果我是個 ε, 是不是也會有個對應我的 δ? 在茫茫人海之中這個 δ 又在何方? 還真有人寫了一首 $\delta - \varepsilon$ 的詩 [15, p.167]。

在數學裡我們用空集合 $\varnothing$ 來代表零; 用包含空集合的集合 $\{\varnothing\}$ 來代表 1。這使得一位在 Georgetown University 數學系執教多年的 Professor Ray Bobo 寫了一首詩 [15, p.132], 下面是這詩的第一段, 現譯成中文如下:

孤獨尋覓而不得, 我在起點前徘徊;
嘆, 若得你雙臂相擁, 便化身爲那唯一之人。

這詩表面上似乎與數學毫無關聯。但若把前兩句的「孤獨」和「起點前」, 解釋爲我現在還未開始, 是個空集合 $\varnothing$, 並且把 $\{\quad\}$ 看成兩個臂膀, 這並非是描述空集合 $\varnothing$, 如何由 $\{\quad\}$ 變成 $\{\varnothing\}(=1)$? 這詩不但寫得有趣, 並觸及哲學上一個大難題: 從零到一, 或是從無到有, 是怎麼形成的 (參見 [27], 及 [28])。Prof. Bobo 似乎是說一個擁抱, 或一些愛, 就能使無中生有。某種情形下這或許如此。但這不大像一位數學家的看法, 倒像一位詩人的看法。後面我會談到許多數學家的確像詩人。

這類詩很多, 我自己也寫過幾首。下面就用我自己的詩 [29, p.31], 來結束本小節。原詩是英文寫就。我把中文翻譯也附在後面。

Who Am I?
whoami is a potent command in *UNIX*.
No matter how thick you are in a mix,
The computer identifies who and where you are
Once you send this command to fix.

But an infinite search it would also start
Through layers of files deep down the heart,
That is impossible to stop
By a mere Ctrl-Delete-Alt.

我是誰?
whoami 是 *UNIX* 裡一句有力的召喚。
無論你在紛亂中如何迷失深陷,
只要輕聲一喚,
機器便告知你是誰、此刻在何地留連。

然而它同時啟動一場無盡的追索,
隨著思慮層層下沉, 直入內心深處;
這樣的搜尋無法停止,
並非一次 Ctrl-Alt-Delete 就能中斷。

III. 我們回到第一節所提到的參考資料 [17]。看看以前的作者如何看待詩與數學的關係。這本書【詩與數學】, 是在 University of Virginia 和 St. John's College 執教多年的布肯南教授 (Scott Buchanan) 所著。他把數學和詩的各方面, 都做了很詳盡的比較。他也認爲數學家和詩人有許多相似之處。他在這本書一開始就提出兩個人, 一位是大詩人但丁 (Dante Alighieri), 另一位是數學家開普勒 (Johannes Kepler)。這兩人表面上似乎沒有什麼關聯。但是布肯南教授指出, 他們和古希臘托勒密的宇宙系統, 都有緊密的關係; 但丁神曲中的世界觀, 就是建構在托勒密的宇宙系統之上, 而開普勒天文學重要著作《宇宙的神秘》(*Mysterium Cosmographicum*) 更是致力於改進托勒密的學說, 使其現代化。兩人用的方法也相差無幾, 但丁是詩人自不必多說, 用的是直觀和類比。即使是開普勒, 那時還沒有牛頓力學, 他用的方法也都是直觀、類比之類。雖然後來的數學家, 多用嚴格的邏輯推論, 但也還是常用直觀類比, 來引導他們研究的方向。不過詩人的直觀與類比, 常來自日常生活, 較爲偏重情感; 而數學家的直觀和類比, 則常來自邏輯構造, 較爲偏重理性。

布肯南認爲數學, 甚至科學雖然強大, 但作爲理解世界的方式仍然「不完整」; 詩的洞察能補足形式系統之外的領域 — 例如價值、目的、情感與生活經驗的厚度。這樣調和理性和感情, 使我們的了解更爲充實。故此詩與數學不應對立, 而是可以互補。

我對此看法非常同意。因爲以科學的方式, 來尋求人世間的真理, 有其局限性。科學是以客觀的方式, 來解釋一個自然現象是如何發生的, 而並不問爲什麼會這樣發生。譬如科學告訴我們萬有引力, 是和距離的平方成反比。可是科學並不告訴我們, 爲什麼和距離的平方成反比。可是與人有關的事情, 我們絕不僅僅滿足於事情的如何發生, 而是事情爲什麼會這樣發生。譬如在一件兇殺案裡, A 開槍打死了B。我們不會只滿足這事情的客觀描述; 比如 B 之死, 是由於 A 扣動了扳機, 引發信管, 使火藥爆炸; 槍彈擊中 B 心臟, 致使大腦缺血 ··· 等等。我們要問爲什麼 A 會開槍; 是不是 B 曾經偷了 A 的錢? 還是曾經做過什麼對不起 A 的事? 如果不知道爲什麼, 我們不會認爲我們真正了解這件事。可是關於這事的「爲什麼」, 我們就要估計對於這事解釋的可信度, 是不是這事嚴重到使 A 殺人。這些都是主觀上的評估。因此也超出了科學範圍之外。

另一項科學不易滿足人的原因, 是科學僅描述純粹客觀的現象, 並不顧及到人對這些現象的感受。1672 年牛頓向英國皇家學院, 報告了他用三稜鏡分析日光的實驗。這是一項很重要的科學發現, 這發現不但使我們了解到日光是由不同波長的光所組成, 並且使我們了解顏色與波長, 及波長折射率間的關係。物體的顏色, 是由這物體對不同波長的光所反射、吸收、或散射所形成。可是德國的詩人和劇作家哥德, 對於牛頓的發現就不很滿意, 因爲對人來講, 最重要的問題是, 爲什麼種種不同的顏色, 會引起人不同的感覺。如果只是斤斤計較顏色的波長, 波的反射或折射率, 無論這工作有多嚴謹多細緻, 還是沒有回答人想問的問題。在 1810 年哥德發表了他自己的顏色理論 (Zur Farbenlehre) [30]。討論人對顏色的感受; 爲什麼人對每種顏色在灰

塵中、雲霧裡、或不同的光源下, 有不同的感覺。他討論爲什麼每一種顏色, 都可以透明 (如彩色燈光) 或不透明 (如衣服或樹葉的顏色), 可是爲什麼人只能看見不透明的白色, 而看不見透明的白色, 他把顏色分類, 討論每種顏色的性質。爲什麼有些顏色讓人興奮, 又有些顏色讓人沉靜。這使後來的藝術家, 建立起暖色和冷色的體系。這似乎都是些科學不易回答的問題。這些爭論直到現代還未完全停止 (見 [31])。

由於這些看法, 數學和詩可能都很重要。

IV. 在這一節我想再回到我本人的經驗, 嘗試尋找詩與數學之異同, 以及爲何數學工作者常常喜歡詩。

因爲寫詩, 我也開始認真地讀詩。

我原喜愛中國古典詩詞, 在牙牙學語時就隨母親背誦了一些短詩。成年後自己也寫了些古體詩。開始讀英詩時, 常把英詩與中國詩相比, 覺得英詩的句法散漫。格律音韻也沒有中國詩整齊。多讀幾首之後, 發現英詩也有它獨特的格律。十四行詩 (Sonnet) 的格律森嚴, 二韻體 (Villanelle) 又旋迴往復, 餘音不斷。有些現代詩人提倡自由詩。但是還是有不少詩人, 遵從傳統的格律。美國詩人Robert Froster 就曾說過, 寫詩如不講格律, 就如打網球不張球網, 使人興趣索然。

我也寫了幾首十四行詩。深知這種詩難寫, 這詩每句必須要有十個音節。這詩的十四行可以分爲八行及六行兩段, 也可以分爲四、四、四、二之四段, 每段之韻腳, 及互相間之關係均有規定。寫的時候自然要花不少時間去鍛字煉句, 但是寫好後確能讓人欣喜。感覺好像剛完成一篇簡短的數學論文; 既有可令人深思的內容, 又有精緻的構架。後來讀到十六世紀英國詩人鄧恩, 寫的一組七首的十四行詩 [32], 我當時認爲嘆爲觀止, 因爲這七首圍繞同一主題, 一氣呵成。並且在結構上彼此相連: 這七首每首詩的最後一句, 和下一首的第一句重複, 而最後一首詩的最後一句, 又和第一首的第一句相重複。這樣循迴往返, 周而複始。後來又見到所謂的, 英雄桂冠的十四行詩 (The Heroic Crown of Sonnet) [33], [34]。其構架更是精緻。一組英雄桂冠需包括一組十五首的十四行詩; 這組前十四首的十四行詩, 需要首尾相連: 即每首最後一行, 需與下一首的第一行重複, 而第十四首的最後一行又需與第一首的第一行重複並且不能與上聯重。至於第十五首的詩則是由前十四首每首第一行所造成, 這第十五首也必須是一首有意義的十四行詩, 並且這十五首詩, 也應該有統一的主題, 和連貫的意義。這詩的構架精美細緻, 前十四首環環相扣, 最後一首又建築在前十四首之上, 使得全詩成爲一個整體。但是這詩太難完成了。可是維基網站 [35] 就記錄了從十五世紀到現在, 世界各地詩人用自己所熟悉的文字, 不斷地在嘗試寫成這種英雄桂冠。

2025年美國出版了一本暢銷書 [36], 書中主題就是一位名詩人寫了一首英雄桂冠的詩, 他寫好後, 把這首詩很細心的謄在一捲很講究的羊皮紙上, 然後把一切與這詩有關的稿件銷毀。這

位詩人在他夫人的生日宴會上, 把這首詩朗頌了一遍, 然後把這捲唯一記錄了這詩的羊皮紙, 獻給了他的夫人。這詩談到了愛情、記憶、和生活環境, 以及這些如何受時間的影響。當時宴會上在座的人, 都覺得這詩, 寫得不但精妙完美, 並且意義深遠。可是若干年後, 記錄這詩的那捲羊皮紙, 竟然不知下落。有位文學史的教授, 根據當時記錄, 設法尋找這捲羊皮紙, 全書的情節就圍繞這主題展開。這書引起不少讀者注意, 紐約時報的讀者, 組織了個讀書會讀這本書。【紐約客】和【經濟學人】, 都把這本書列爲 2025 最佳小說之一。網站更有不少有關英雄桂冠詩體的討論。可見大家對英雄桂冠詩體的興趣始終不衰。這可能是愈難愈具有挑戰性。我想更可能是, 因爲這組詩的構架精緻完美, 使人覺得值得做。

英雄桂冠有如此緊密的結構, 常使我覺得像篇數學論文。這感覺在近兩年更是強烈, 因爲我和另一位研究數學的朋友, 這兩年正在研究一種叫劉維爾數 (Liouville Number) (見附錄二)。我們知道數有有理數和無理數。我們對無理數所知甚少。除了 π 和 e 之外我們所能列舉的無理數, 幾乎都是代數數 (Algebraic Number)。可是在 1884 年, 法國數學家劉維爾 (Liouville), 發現有許多不屬於代數數的無理數。這種數究竟有多少? 這種數在數軸上佔據的位置, 似乎不多, 因爲無論我們用分析上的勒貝格測度 (Lebesgue measure) 去測, 或是用拓樸上的豪斯道夫測度 (Hausdorff measure) 去測, 這數在數軸上的測度都是零。可是另一方面, 根據我們近兩年的研究, 這種數可說是取之不盡, 同時又是無處不在的: 因爲這數可以分隔出多至不可數的子集 (uncountably many subsets), 這些子集是互不相交的, 並且每一子集在數軸上是緊密 (dense) 的, 這就是說數軸上每一個不空的區間, 無論多小, 都必定包含每一子集裡的元素。更令人驚異的是, 這每一小子集也可以用同樣方式, 再分隔成多至不可數的, 互不相交的, 又是緊密的更小的子集。這些更小的子集, 又再可以以同樣方式去分隔, 以致無窮無盡。這樣細緻的結構, 自然意謂著劉維爾數在數軸上, 不會只佔據一些稀有孤零的位置, 而是侵入到每一小空間。我們這篇論文, 已在加拿大數學學會的雜誌刊出 [37]。

我在做這篇論文時, 深切感覺到詩人和數學工作者相似之處。兩者都重視他們所從事事物的結構。數學工作者在研究一種自然物體時, 常會尋找這物體背後的結構, 知道基本結構可以增進對這物體的了解。詩人寫詩需要選擇一種詩體, 例如要寫的是十四行詩, 五韻五拍無韻體 (Lambic pentameter blank verse), 抑或是歌謠體 (Ballad), 或是俳句 (Haiku), 這就是這首詩的結構。然後遵從這結構對於格律的要求來寫。中國古體詩亦然, 需先決定是律詩或絕句等詩體, 然後在結構上, 滿足這結構在平仄、韻腳、對仗的要求。詩人和數學工作者都重視結構。所不同的是, 詩人先有了結構, 然後在這結構架上建築詩篇。而數學工作者, 則反向而行。先有了物體, 然後尋找這物體背後的結構。

我同時又覺得, 我似乎懂得了一些數學工作者爲何喜歡詩。因爲當一位數學工作者看到一篇作品時, 由於職業上的本能, 常不自覺地去尋求這作品底下的結構。與一般寫作相比, 詩正有這些構架, 以供讀者能得到更深一層的體會。即使是自由體的詩, 也講究節拍 (Rhythm) 與韻

律 (Rhyme)。這些構架能讓讀者讀得更深, 也因此能讓讀者得到更多欣喜。這也許是使一些數學工作者, 喜歡詩的原因之一吧。

本文寫好後有位朋友告訴我在 1979 年, 有位物理學家 Mark Peterson 發表了篇論文 [50], 指出但丁神曲中所描述的宇宙, 處處和廣義相對論的封閉宇宙模型相吻合。但丁描寫的宇宙, 是在他神曲的第 28 章 (Paradiso, Canto 28)。這時他已到了第九層的天上, 也是人世宇宙的最高層。俯身向下, 他看到一層一層的天, 以地球爲中心, 以同心球面的方式, 向外擴展。我們所知的一些太陽系的星球, 就在這些不同的球面之上。他這時仰頭望上, 也看到以神爲中心的九層同心球面的天, 到他所站的這層爲止, 包含著一群群的天使。這是屬於神的宇宙。這樣看來屬於人的宇宙, 是一個以地球中心爲點, 以第九天爲面, 形成的一個錐體。人世宇宙裡一層層的天, 正是這錐體一個個的橫切面。而神的宇宙, 則是以神爲點, 以第九天爲面, 形成的另一個錐體。第九天是個二維的球面。在同一二維球面, 内外二點形成的一個雙錐體, 以拓樸的眼光來看, 正是個三維的球面[2]。一個三維的球面, 也正是個滿足廣義相對論的封閉宇宙模型。這篇論文的作者對於什麼是錐體, 爲何一個二維球面的雙錐體, 是個三維球面, 都說得很淸楚。有興趣的讀者不妨找 [50] 來看看。這似乎又是個詩人和數學家在心底深處相通的例子。

文中提到了兩種數: 超現實數和劉維爾數。以下兩個附錄, 就把這兩種數稍爲介紹。

附錄一: 超現實數

在這附錄裡我們介紹一下什麼是超現實數, 這些數又是如何建立的。我把這數提出來介紹, 一則是因爲這數建立過程的本身, 是一段非常漂亮的數學, 另一則是據建立這數的數學家 John Horton Conway 自稱, 他開始研究超現實數系統, 是因爲他想用數學方式分析圍棋。這可能使國內讀者感覺興趣。故此我把這數在此作稍詳盡的介紹。

超現實數是一個數的系統, 它不但包含實數, 還包含無窮小量 (Infinitesimal Numbers), 和超限序數 (Transfinite Ordinal Numbers)。我們先介紹一下後兩者。

無窮小量是一些非常小, 而不等於零的數, 他們比任何一個不等於零的實數, 更接近於零。牛頓和萊布尼茲在發展微積分時, 都使用過無窮小量來描述極限。這些數既然小於任何不等於零的實數, 而又不等於零, 他們究竟是什麼? 因爲這些數沒有嚴格的定義, 當時很受到一些批評。到了十九世紀一些數學家如 Augustin-Louis Cauchy, Benard Bolzano, Karl Weierstrass 等人引進了 $\delta-\varepsilon$ 方法。因此在微積分教學裡便揚棄了無窮小量。可是到了 1960 年代, 有些數學家認爲這些無窮小量, 可以給我們有用的直觀。並且一些數學家和工程師, 從十七世紀以來, 一直不斷地在用無窮小量, 而得到正確的結果。在這些 60 年代數學家小心的處理下, 發現這些

[2]從一個點到一個面的錐體, 是由這個點到這面上每一點的直線所形成。從一個二維球面的中心向這二維球面所形成的錐體, 就變成一個三維的球體。現在如果這球體外面又有一點, 我們假想外面這一點是無窮遠點, 即是在三維空間無論往任何方向走, 最後都到這一點上。那以這無窮點和球面所成的錐體, 就包括從這球體向外的每一根直線。因此這雙錐體就包括三維空間中的每一點。但是現在這三維空間已經不是平常的三維空間了。因爲我們把每一無窮遠都收歸爲一個點。因此這個雙錐體是個三維的球面。這就好像在一平面上-如果每一方向到了無窮遠, 都歸於同一點, 那麼這平面已變成了一個球面。

無窮小量, 可以在嚴格的邏輯程序下, 納入數的系統 [38], [39]。

超限數 (Transfinite Numbers) 是一些無窮大的數。這些數可分爲兩大類: 超限序數 (Transfinite Ordinal Numbers) 和超限基數 (Transfinite Cardinal Numbers)。要了解這兩種數的區別, 我們需知道正整數有兩種不同的使用法: 一種是用來表示前後秩序, 另一種是用來測定多少。譬如 3 這個數, 可用來表示先後; 如某人得到了第三名; 3 也可以用來表示多少, 如這問題有三種解法。當一正整數用來表示先後, 我們說這數是當作序數 (Ordinal Number) 來使用; 如果這正整數用來表示多少, 我們說這數是當作基數 (Cardinal Number) 來使用。所以正整數既可做爲序數亦可做爲基數。但是無窮大的數, 我們需要兩種不同的數: 超限序數用來表示先後; 超限基數用來表示多少。

自 Georg Cantor 發展出他的集合理論之後, 我們對於超限數的了解也更加完備; 這兩種超限數包含了什麼樣的數? 我們如何決定他們的順序或大小? 他們有什麼樣的運算規律? 這些我們都可以在集合論中學到 (例如 [40, Sections 19-25])。尤其是超限序數, 雖然含有無窮多個無窮大的數, 但他們形成一個良序集 (A Well-Ordered Set), 並且數學歸納法可以推廣到這個集裡 (Transfinite Induction)。

1973 年英國劍橋大學數學教授 John Horton Conway 發現了一個很漂亮而嚴密的方法, 把實數、無窮小量、和超限序數都納入同一個數的系統。這個系統仍有加減乘除的運算而成爲一個域 (Field)。實數中的 0 與 1 仍爲這域中之單位元。這個域仍保留了序 (Order) 的性質而使這系統成了個有序域 (Ordered Field)。在這有序域內, 每一實數都被一羣無窮小量所包圍。這些無窮小量和他們所包圍實數的距離, 遠低於這實數和其他實數間的距離。另一方面, 這有序域中每一正超限序數均大於每一實數。Conway 把他建立這有序域的方法, 告訴了史丹佛的 Donald E. Knuth 教授。Knuth 建議把這有序域, 命名爲「超現實數」。然後出版了一本書 [41], 這本書以小說的方式, 把 Conway 的方法, 借用一對情侶的對話, 把這系統一步一步地建立起來。另一冊對超現實數有系統的介紹見 [42]。

我們現在就很簡略的介紹一下 Conway 的方法。下面我們用 S 來代表所有的超現實數。剛開始時 S 是個空集。Conway 不斷地重覆同一個程序。每次引進一個新的數進入 S。他的程序是這樣的: 他先在 S 中選取兩組元素 L 和 R, 使得 L 中每一元素都小於 R 中的每一元素。然後用 $\{L \mid R\}$ 來定義一個 L 與 R 之間的一個新數。剛一開始時, S 中沒有任何東西, 故此 L 和 R 也都是空集。Conway 就用 $\{\ \mid\ \} := 0$, 此處 “:=” 代表 “定義爲”。現在 S 中有了 0, 我們可以重覆使用下列一連串的程序, 引進所有的正整數:

$$\{\,0\mid\ \} := 1, \quad \{\,1\mid\ \} := 2, \quad \{\,2\mid\ \} := 3, \ \ldots$$

這種重覆使用已有的數, 建造新數的方法叫遞歸法 (Recursive Method)。下列一連串的程序,

又引進所有正的 2 進分數; 即分母爲 2 的冪次正分數:

$$\{0 \mid 1\} := \frac{1}{2}, \{0 \mid \frac{1}{2}\} := \frac{1}{4}, \{\frac{1}{2} \mid 1\} := \frac{3}{4}, \{1 \mid 2\} := \frac{3}{2}, \{1 \mid \frac{3}{2}\} := \frac{5}{4}, \{1 \mid \frac{5}{4}\} := \frac{9}{8}, \ \ldots$$

如果 $x=\{L_x \mid R_x\}$, 我們可以定義其負值爲 $-x=\{-R_x \mid -L_x\}$。例如 $-1=-\{\ 0 \mid\ \}$ $=\{\ \mid 0\}$ 此處 $-\{\ 0 \mid\ \}=\{\ \mid 0\}$ 是因爲 0 和空集位置互換後, 他們的負值仍舊是他們自己。試比較 1 和 -1 的定義, 我們可以看出, 這確實是一個合理的負值定義。其他的數也是如此如 $-\dfrac{1}{2}=-\{0 \mid 1\}=\{-1 \mid 0\}$。

把 S 中每一數的負值都引進之後, S 就包含了所有整數, 和所有二進的分數。有了所有二進分數, 我們就可以以下列方法引進任一實數: 對應每一實數 r, 我們只需要讓相應的 L 包含從左方逼近 r 的一組二進分數; R 包含從右方逼近 r 的一組二進分數[3]。那麼 $r := \{L \mid R\}$。例如分母不等於二冪數的 $\dfrac{1}{3} := \left\{0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{16}, \ldots \,\middle|\, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{8}, \ldots\right\}$。又例如 $\pi := \left\{3, \dfrac{25}{8}, \dfrac{201}{64}, \ldots \,\middle|\, 4, \dfrac{7}{2}, \dfrac{13}{4}, \dfrac{51}{16}, \ldots\right\}$。

我們現在又可以引入超限序數: $\{1, 2, 3, \ldots \mid \quad\} := \omega$ 以及 $\{\quad \mid -1, -2, -3, \ldots\} := -\omega$。這樣定義出來的 ω, 將大於所有的正整數。而 $-\omega$ 又小於所有的負整數。故此 ω 及 $-\omega$ 均爲超限序數。

我們也可以引入無窮小量: $\left\{0 \,\middle|\, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots\right\} = \varepsilon$ 以及 $\left\{-1, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{4}, \dfrac{-1}{8}, \ldots \,\middle|\, 0\right\} := -\varepsilon$。這是兩個無窮小量, 在零的兩邊。他們比任何一個二進分數更接近於零。因爲在零與任何一個不等於零的實數之間, 我們一定能找到一個不等於零的二進分數, 而 $\pm\varepsilon$ 又較任一不等於零的二進分數, 更接近於零。因此這兩個無窮小量, 比任何一個不等於零的實數, 更接近於零。

Conway 在把這些數引進 S 之後, 又開始引入這些數的運算。因爲 S 中每一數 $x = \{L_x \mid R_x\}$ 都有左右兩個集合 L_x 與 R_x, 這情形和 Dedekind 當年建築實數系統時所用的 Dedekind Cuts 情形相似。我們也可以把當年以 Dedekind Cuts 來定義實數運算的方法, 用在 S 中每數左右兩集合之上, 以定義 S 中的加、減、乘、除。我們可以證明, 在這些運算之下, S 成爲一個有序域。此處細節從略。有興趣的讀者, 可參照參考資料 [41]-[45] 或 Wikipedia 有關 Surreal Number 的網站; 對數學有訓練的讀者, 如想看看超現實數更新的發展, 可參照資料 [46]。

經過這些域的運算, 我們又可以建立出無窮多個超限序數和無窮小量。例如從 ω 我們可以得到 $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, 2\omega, 3\omega, \ldots, \omega^2, \ldots$ 這些超限序數, 和他們的負值等等。我們也可以在同樣情形之下利用 ε 和 $-\varepsilon$, 建立起無窮多個圍繞著零的無窮小量, 如 $\pm\dfrac{\varepsilon}{2}, \pm\dfrac{\varepsilon}{4}, \pm\dfrac{\varepsilon}{8}, \ldots$ 等等。經過平移 (Translation) 之後我們可以看到每一實數, 都圍繞著無窮多個無窮小量。

John Horton Conway 基本上就用了左右集合的定義, 和遞歸的方法, 從一個空集合, 一

[3]這種引進方法顯示同一數可以有不同的 L 和 R, 故此每一超現實數是一組 $\{L \mid R\}$ 的等價值 (equivalence class)。

步一步地建立起來這樣龐大而複雜的系統。這真是了不起。Donald Knuth 也在他有關 Surreal Number 的網站上說: Conway 就如一位魔術師, 揮舞著他的遞歸魔棒, 然後從一個空袋子裡, 拉出來一串串奇妙的數字 (見參考資料 [41] 中之網站)。從這裡我們也可以看出遞歸法的神奇力量: 能夠從平淡無奇的起點, 建立起奇妙複雜的系統。我想這也吸引了 Kas Maslanka 把超現實數和遞歸法, 用在他的藝術作品之上。我想指出, 曾有數學工作者以詩的方式, 發表他們的研究成果 [24], [26]。現在又有數學工作者以小說的方式, 發表他們的研究成果 [41]。誰說數學工作者不像詩人?

前面提到 Conway 之所以發展超現實數。開始是他想用數學方法分析圍棋。他在發展超現實數之前, 就已用遞歸法和左右集合作了大量的工作。他考慮兩人從事一項博弈 (Game)。他用左右兩個集合 L 和 R 表示這兩人可行的步驟, 並用 $\{L \mid R\}$ 定出一個數來描述當前博弈的狀況。然後又引入有關 $\{L \mid R\}$ 的種種運算, 來分析當前的這項博弈。他發展出的這套理論, 可以應用在不少組合博弈 (Combinatorial Game) 的問題上。他和另外兩位數學家 Elwyn R. Berlekamp 和 Richard K. Guy 一起合作之下, 他們三人出版了一部兩巨冊, 超過八百頁的鉅著 [45], 描述 Conway 的理論如何應用在種種博弈問題上。可惜圍棋過於複雜 — Conway 說這是「大人的游戲」(Grownup Game) (見 [44, p.667])。書中所述的理論, 除了 Thermographic techniques [45, pp. 157-158] 之外, 其他部份能用在圍棋之上, 似乎很少 [45, p.17]。可是有一點 Conway 始料未及的收穫是, 這使他建立起超現實數的系統。讀者若有興趣想多了解一點 Conway 的博弈理論, 除了上述的兩巨冊著述之外, 還有一篇文章 [46], 這篇文章雖短, 卻寫得淸楚易懂。

附錄二: 劉維爾數

在本文第 IV 節中我們談到了劉維爾數 (Liouville Numbers) 和代數數 (Algebraic Numbers)。劉維爾數和代數數都是無理數。我們所知道的無理數大多是代數數。代數數是以有理數爲係數多項等式的根。所有的根式例如 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt[3]{5}$ 都是代數數: $\sqrt{2}$ 是 $x^2-2=0$ 的根; $\sqrt[3]{5}$ 是 $x^3-5=0$ 的根。如果 a 是一個 n 次多項等式的根, 而又不是更低次多項等式的根, 那我們說 a 是一個 n 次的代數數。因爲無理數多至不可數 (Uncountable), 而代數數雖也是無窮多, 卻是可數的 (Countable), 故此一定還有無窮多個不是代數數的無理數。這些數叫做超越數 (Transcendental Numbers)。超越數雖然多至不可數, 我們對這些數不但所知甚少, 甚至除了與 π 及 e 有關的幾個數之外, 我們幾乎很難再列舉出什麼是超越數。因此我想也介紹一下劉維爾的工作。他是如何一下子就找出多至不可數的超越數。

在 1884 年 Liouville 發現超越數的原因, 是他那時正在研究如何用有理數來找無理數的近似值。這是個很重要的課題。因爲每一無理數如用小數展開, 都需要無窮多的位數, 而這些位數還不能做週期性的重複。我們在計算上無法直接使用這些數; 我們只能用他們有限位數的近

似值, 而任一有限位數的數, 都是有理數。可是當我們用無理數的近以值以代替這些無理數時, 會有怎樣的誤差? Liouville 發現如果 a 是一個 n 次的代數數, 那麼相對這個 a 會有一常數 $c>0$, 以使任意一個有理數 $\frac{p}{q}$, 一定會有 $|a-\frac{p}{q}|>\frac{c}{q^n}$。這就是說當這無理數是個代數數時, a 的任何一個有理數的近似值, 永遠有個不可縮小的誤差。

劉維爾想是不是能找出一些無理數沒有這種限制? 換句話說是否能找出一些無理數 a 滿足下列條件:

對應每一正整數 n, 都能找出至少一個有理數 $\frac{p}{q}$ 而滿足

$$|a-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^n} \tag{$*$}$$

如上所述, 代數數就不可能滿足這條件。故此能滿足這條件的無理數, 必定是超越數。他又發現如果 $a_1,a_2,\ldots,a_k,\ldots$ 是任一無窮序列的整數, 其中每一項 a_k 都滿足 $0\le a_k\le 9$, 那麼 $a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^{k!}}$ 必定是一個能滿足 $(*)$ 條件的超越數。

我們先看看這種 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^{k!}}$ 是怎樣的一個數, 然後再看怎麼證明這種數能滿足 $(*)$ 條件。

我們如果把 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^{k!}}$ 展開, 我們會發現 a_1 是小數點後第一個數值, a_2 是小數點後第二個數值, a_3 則是在小數點後第 $6(=3!)$ 個數值 $\cdots a_k$ 在小數點後第 $k!$ 個數值 $\cdots$ 而在其他位置上數值都是零。這種數是個無窮而不循環的小數, 所以也必定是個無理數。

這種數又很多, 因爲 $a_1,a_2,\ldots,a_k,\ldots$ 可以是任何一個 0 與 9 間數值的無窮序列。我們可以用康托對角化方法 (Cantor Diagonalization Process) 證明這種 $a_1,a_2,\ldots,a_k,\ldots$ 序列多至不可數。故當劉維爾一旦證明凡是這種 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^{k!}}$ 數都必定能滿足 $(*)$ 條件, 他一下子就發現了多至不可數的超越數 [47]。因此近代的一位超越數論專家, 也是位 Fields Medal 獲得者, Alan Baker, 在他超越數論的書裡, 認爲 Liouville 是超越數論的創始人(見 [48, p.1])。並且後人把凡能滿足 $(*)$ 條件的無理數都稱之爲劉維爾數 (Liouville Number)。

我們現在看看他怎麼證明這種 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^{k!}}$ 數都能滿足 $(*)$ 條件: 假如有了一個 $a=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^{k!}}$, 我們需要證明對於每一正整數 n, 我們必能找出有理數 $\frac{p}{q}$ 滿足 $|a-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^n}$。

假如 n 是個正整數。我們可以讓 $q=10^{n!}$ 及 $p=q\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^{k!}}\Big)$. 那麼 $\frac{p}{q}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^{k!}}$。所以

$$\Big|a-\frac{p}{q}\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^{k!}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^{k!}}\Big|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{10^{k!}}\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{9}{10^{k!}}$$

上面最後一個不等式, 是因爲每一 a_k 都滿足 $0\le a_k\le 9$。最後的這個和 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{9}{10^{k!}}$ 將會小

於或等於 $\sum\limits_{k=(n+1)!}^{\infty} \frac{9}{10^k}$, 因爲在後者, k 可以從 $(n+1)!$ 起, 等於每一個正整數 — 包括大於或等於 $(n+1)!$ 所有的階乘。而

$$\begin{aligned}\sum_{k=(n+1)!}^{\infty} \frac{9}{10^k} &= \frac{9}{10^{(n+1)!}} + \frac{9}{10^{(n+1)!+1}} + \frac{9}{10^{(n+1)!+2}} + \cdots \\ &= \frac{9}{10^{(n+1)!}}\Big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\Big) \\ &= \frac{9}{10^{(n+1)!}}\Big(\frac{10}{10-1}\Big) = \frac{10}{10^{(n+1)!}} \le \frac{10^{n!}}{10^{(n+1)!}} \\ &= \frac{1}{10^{(n+1)!-n!}} = \frac{1}{10^{(n+1)n!-n!}} = \frac{1}{10^{n(n!)+n!-n!}} = \frac{1}{10^{n(n!)}} = \frac{1}{q^n}\end{aligned}$$

故此 $|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$。

我們現在知道凡是這種 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}$ 數都能滿足 $(*)$ 條件, 因此都是劉維爾數。除了這些數之外還有些什麼數是劉維爾數? 答案是除了上述的這種數之外, 劉維爾數還包括多至不可數的其他形形色色的數。我們姑且把上述的這種 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}$ 數, 稱之爲基本劉維爾數 (Elementary Liouville Number)。我們可以很容易看到, 有許多劉維爾數不是基本的劉維爾數。這是因爲基本劉維爾數展開成無窮小數後, 只有在小數點後 $k!$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ 的位置上, 能有個不等於零的數值, 而在其他位置上的數值全部爲零。我們如果把每一基本劉維爾數都乘上 $\frac{1}{10}$, 這些新的數在小數點後不等於零的數值都往後挪了一位。除了 $k = 2$ 之外在其他的 $k!$ 位置上的數值都是零。所以這些新數不再是基本劉維爾數。用類似上面的證明, 我們可以證明這些新數都是劉維爾數, 並且這些數也是多得不可數。

超越數中除了劉維爾數之外, 還有沒有其他的數? W. M. Priestley 在 1976 證明了, 除了劉維爾數之外, 還有多至不可數的超越數 (見 [49, Corollary 2])。雖然不是劉維爾的超越數多到不可數, 但是我們能夠具體列舉的也只有有限的幾個而已。因爲要證明某個超越數不是劉維爾數, 我們需要證明這數不能滿足上述 $(*)$ 條件。一般證明要牽涉到無理測度 (Irrationality Measure), 這些證明都很麻煩。我們現在知道不是劉維爾數的超越數, 不過是 e, π, π^2, π^3 等幾個而已。另外有幾個數如 e^π, 我們還不知道究竟是不是劉維爾數。故此在這方面還有不少研究課題可做。

參考資料

1. 曹莉主編。科學與人文, 清華大學新人文講座第六輯。北京清華大學出版社, 2013。
2. 卓照明。尋找臺灣世界語朋友。Priĉiocetera / Forumo - lernu.net。
3. 王九逵。維基百科, 自由的百科全書。
4. 何崇武。談酒 Translated by JK Wang.pdf - Google Drive.

5. 古遠清著。台灣當代新詩史。台北文津出版社, 2008。
6. 維基百科, 現代詩論戰: https://zh.wikipedia.org/wiki/現代詩論戰# cite_note-台72-10。
7. 唐文標, 蔡明諺。(維基網站) 我所認識的「大俠唐文標」。
8. 唐文標。(維基網站) 唐文標數位資料館: 關於唐文標。
9. 唐文標。(維基網站) 維基百科, 自由的百科全書。
10. 唐文標。(維基網站) 文學評論家唐文標_科星球_百度百科。
11. 現代詩論戰 - 維基百科, (維基網站) 自由的百科全書。
12. Karl Weierstrass - Wikiquote.
13. *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathematiciens tenu à Paris du 6 au 12 août* 1900, Gauthier-Villars (Paris), 1902.
14. AMS : Math Poetry — Wikipedia (這是美國數學學會, 每年舉辦一次詩比賽的網站。在這網站你可看到, 有關比賽的種種資料。)
15. *Strange Attractors: Poems of Love and Mathematics*, Ed. by S. Glaz & J. Growney, CRC Press, Boca Raton, FL, 2008.
16. *Journal of Mathematics and the Arts* — Wikipedia (這是一個探討數學和藝術有關的刊物。此處『藝術』包含繪畫、塑雕、詩、散文、戲劇等等, 以及他們和數學之關聯)。
17. *Poetry and Mathematics*, Scott Buchanan, First Keystone Edition, J.B. Lippincott Company, Philadelphia and New York, 1929, 1962.
18. *Mathematics, Poetry and Beauty*, by Ron Aharoni, World Scientific Publishing Co. Singapore, 2014.
19. *Mathematics is the Poetry of Science*, by Cedric Villani, Oxford University Press, 2020.
20. *Math Poetry*, by Harvey A. Stone & Bethany E. Watson, Independently Published, 2024.
21. *Verse & Universe: Poems About Science and Mathematics*, Ed. by Kurt Brown, Milkweed Editions, 1998.
22. *Mathematical Poetry* 見 Wikipedia 中 Maslanka 條 (這是藝術家 Kas Maslanka 有關數學藝術作品的網站)。
23. *A review of the surrealist connection between John Horton Conway and Kazmier Maslanka* by Alberto Indiana.
24. *The Kiss Precise*, F. Soddy, Nature, **137**, (1936), p.1021. doi.org/10.1038/1371021a0.
25. Descartes' theorem - Wikipedia.
26. "*The Kiss Precise*". Nature 139, (1937 p.62). https://doi.org/10.1038/139062a0.
27. *Why Is There Something Rather Than Nothing*, Leszek Koladowski, Basic Books, Hachette Book Group, New York, 2007.
28. *Why does the World Exists*, Jim Holt, Liveright Publishing Corp., A Division of W.W. Norton & Co., New York, London, 2013.
29. *Leaf by Leaf*, Pearson Custom Publishing, Spring 2003.
30. *Zur Farbenlehre*, 2 vol. set, Johann Wolfgang von Goethe, J.G. Cotta'schen Buchhandlung (Cotta Publishing house), Tüingen, May 1810.
31. *Goethe Contra Newton* (3), Dennis L Sepper, Cambridge University Press, 2003.
32. *The Complete English Poems*, John Donne, Penguin Classics, 1977.
33. *The Development of the Sonnet: An Introduction*, Michael R.G. Spiller, Routledge, 1992.
34. *Princeton Encyclopedia of Poetry and Poetics*, 2nd Revised & Enlarged Ed., Alex Pre-

minger (Editor), Princeton Univ., Press, 1975.
35. Crown of sonnets - Wikipedia.
36. *What We Can Know*, Ian McEwan, Knopf, 2025.
37. *Infinitely repeated partitions of Liouville numbers*, Chungwu Ho and Seth Zimmerman, *Canadian Math. Bulletin*, Vol. 69 (1), 2026. Canadian Math. Society, p.142-149. `https://dx.doi.org/10.4153/S0008439525100957`.
38. *Formalism* 64, Abraham Robinson, Proceedings of the International Congress for Logic Methodology and Philosophy of Science, Jerusalem, Amsterdam, North Holland, 1964.
39. *Non-Standard Analysis*, Abraham Robinson, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966, 2nd Ed., 1974.
40. *Naïve Set Theory*, Paul R. Halmos, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, Toronto, New York, London, 1960.
41. *How Two Ex-Students Turned On To Pure Mathematics and Found Total Happiness*, Donald E. Knuth, Addison-Wesley, Reading Mass., 1974.
See also: `https://www.cs.stanford.edu/~knuth/sn.html`.
42. *Surreal Numbers*, 1st Ed., Donald E. Knuth, Addison-Wesley Professional, Reading, Mass., 1974.
43. *On Numbers and Games*, 2nd Ed., John H Conway, A. K. Peters/CRC Press, Boca Raton, FL 2000.
44. *Conway's Mathematics after Conway*, Alex Ryba with contributions by P. Ehrlich, R. Kenyon, J. Lagarias, J. Propp, and L. H. Kauffman, Notices of Amer. Math. Society, Aug. 2022, pp. 1145-1155.
45. *Winning Ways*, Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy, 2 vol., Academic Press Inc., London, Florida, 1982.
46. *All Games Bright and Beautiful*, John H. Conway, The Amer. Math. Monthly, Vol. 84, No. 6, 1977. 417-434.
47. *Memoires et communications*, J. Liouville, Comptes rendus de l'Académie des Sci. 18 (1844), 883-885.
48. *Transcendental Number Theory*, Alan Baker, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.
49. Sets thick and thin, W. M. Priestley, *Amer. Math. Monthly*, 83(1976), No. 8, 648-650.
50. Dante and the 3-sphere, Mark A. Peterson, *Amer. J. Phys.*, 47(1979), No. 12, 1031-1035.

—本文作者爲美國南伊里諾大學愛德華校區數學系退休教授—